# Référentiel « propre » d'un cône.

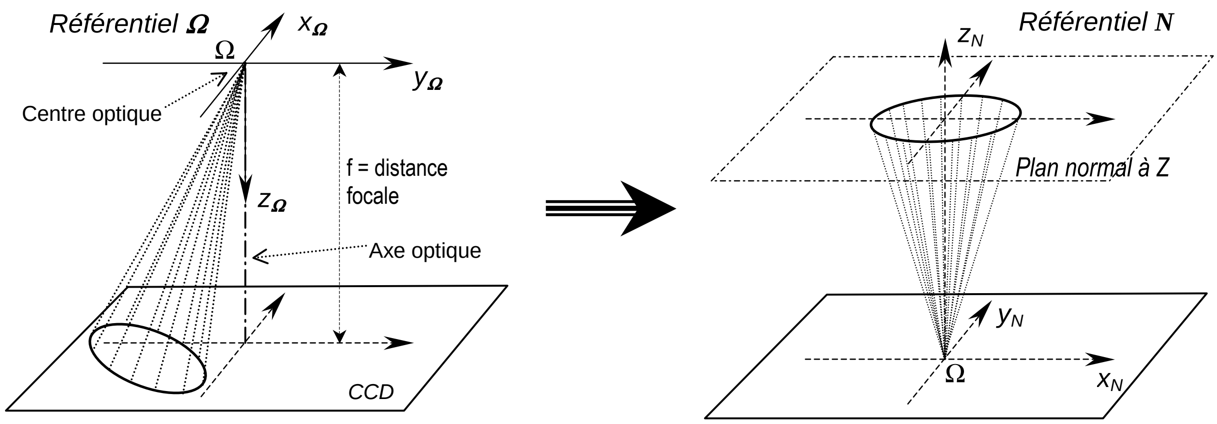
## Objectif :

Trouver un référentiel « N » (Normalisé) où l'équation du cône :

$$a_3x^2 + b_3y^2 + c_3z^2 + d_3xy + e_3xz + f_3yz = 0 \qquad \textbf{Eq. 1}$$

s'écrive sous la forme :

$$p^2x_N^2 + q^2y_N^2 = z_N^2 \qquad \textbf{Eq. 2}$$




**Changements de référentiels CCD - propre**

## Traitement

### 1) Ecriture matricielle.

Nous repartons de l'équation de cône elliptique (Eq.1).
Le premier membre peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_3 & d_3' & e_3' \\ d_3' & b_3 & f_3' \\ e_3' & f_3' & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \textbf{Eq. 3}$$

avec $d_3' = \dfrac{d_3}{2}$, $e_3' = \dfrac{e_3}{2}$, $f_3' = \dfrac{f_3}{2}$

### 2) Diagonalisation.

La matrice centrale est symétrique, à coefficients réels ; elle peut donc être diagonalisée ; la matrice de passage sera une matrice de rotation 3D.

On cherche donc à introduire une matrice diagonale dans le système.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\times(MR)\times\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\times(MR)^{-1}\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \textbf{Eq. 4}$$

avec *MR*, la matrice de changement de base ; ici une matrice de rotation en 3D.

## a) Valeurs propres.

Les valeurs propres λ sont les racines de l'équation :

$$d\acute{e}t\begin{pmatrix} a_3-\lambda & d_3' & e_3' \\ d_3' & b_3-\lambda & f_3' \\ e_3' & f_3' & c_3-\lambda \end{pmatrix}=0$$

Eq. 5

Soit :

$$\begin{cases} -\lambda^3 \\ +\lambda^2(a_3+b_3+c_3) \\ +\lambda(-a_3b_3-a_3c_3-b_3c_3-d_3'^2-e_3'^2-f_3'^2) \\ +a_3b_3c_3+2d_3'e_3'f_3'-a_3f_3'^2-b_3e_3'^2-c_3d_3'^2=0 \end{cases}$$

Dans le cas de diagonalisation de matrice symétrique à coefficients réels, les trois racines sont réelles. Voici une technique de résolution d'équation du troisième degré :

**Résoudre sur R une équation du 3ième degré**, de type $ax^3+bx^2+cx+d=0$, avec a ≠ 0 :
Les coefficients a, b, c et d étant donnés, on calcule successivement :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $B=\dfrac{b}{3a}$ | $C=\dfrac{c}{a}$ | $D=\dfrac{d}{a}$ | $P=-3B^2+C$ | $Q=2B^3-BC+D$ | $K=\dfrac{4P^3}{27}+Q^2$ |

Si K < 0, alors il y a 3 solutions réelles (et c'est notre cas : 3 solutions réelles) :

On pose $\begin{cases} T=\dfrac{1}{3}\cos^{-1}\left(\dfrac{3Q}{2P}\times\sqrt{\dfrac{-3}{P}}\right) \\ R=\sqrt{-4P/3} \end{cases}$ ; alors $\begin{cases} x_1=-B+R\cos T \\ x_2=-B+R\cos(T+2\pi/3) \\ x_3=-B+R\cos(T+4\pi/3) \end{cases}$

**Solution Equation du 3ième degré**

Application numérique : $\begin{cases} \lambda_1=0,9427 \\ \lambda_2=1,1621 \\ \lambda_3=-4,45\times10^{-5} \end{cases}$

L'indicage des λ est à priori arbitraire. Parmi toutes les quadriques, le cône se caractérise par une valeur propre négative et deux valeurs propres positives. Le choix judicieux est le suivant :

- $\lambda_1$ est la plus petite racine positive,
- $\lambda_2$ est la plus grande racine,
- $\lambda_3$ est la racine négative.

Ainsi dans la nouvelle base N, les axes du référentiel seront cohérents avec la formule canonique (Eq.2).

Dans le référentiel N, l'intersection entre le cône et tout plan « *z* = constant » forme une ellipse, dont le grand axe coïncide avec l'axe des *x*, et le petit axe coïncide avec l'axe des *y* .

Les valeurs propres donnent directement la formule réduite, sans termes mixtes :

$$\lambda_1 x_N^2 + \lambda_2 y_N^2 + \lambda_3 z_N^2 = 0 \qquad \textbf{Eq. 6}$$

A.N. : $0,9427.X^2 + 1,1621.Y^2 - 4,45.10^{-5}.Z^2 = 0$

soit, sous la forme recherchée (Eq.2) :

$$\frac{\lambda_1}{-\lambda_3} x_N^2 + \frac{\lambda_2}{-\lambda_3} y_N^2 = z_N^2 \qquad \textbf{Eq. 7}$$

## b) Vecteurs propres

Les 3 vecteurs propres sont les solutions de l'équation : $\begin{pmatrix} a_3 & d_3' & e_3' \\ d_3' & b_3 & f_3' \\ e_3' & f_3' & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

qui conduit au système d'équations : $\begin{cases} V_x(a_3 - \lambda) + d_3'V_y + e_3'V_z = 0 \\ d_3'V_x + (b_3 - \lambda)V_y + f_3'V_z = 0 \\ e_3'V_x + f_3'V_y + (c_3 - \lambda)V_z = 0 \end{cases}$ **Eq. 8**

dont le déterminant est nul (Eq.5). Dans chacun des 3 cas ($\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$), les systèmes admettent une infinité de solutions ; nous choisissons les vecteurs unitaires formant un référentiel direct.

A.N. : $\begin{cases} V_{1x} = -0,8595 \\ V_{1y} = 0,5109 \\ V_{1z} = 0,0168 \end{cases}$ $\begin{cases} V_{2x} = 0,51114 \\ V_{2y} = 0,8593 \\ V_{2z} = 0,01503 \end{cases}$ $\begin{cases} V_{3x} = 0,006758 \\ V_{3y} = -0,0215 \\ V_{3z} = 0,99975 \end{cases}$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \times [MP] \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \times [MP]^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ , \qquad \textbf{Eq. 9}$$

avec $[MP] = \begin{pmatrix} V_{1x} & V_{2x} & V_{3x} \\ V_{1y} & V_{2y} & V_{3y} \\ V_{1z} & V_{2z} & V_{3z} \end{pmatrix}$ et $[MP]^{-1} = \begin{pmatrix} V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \end{pmatrix}$